

# PRODUCTO VECTORIAL

Definición: Se define el producto vectorial de 2 vectores como una operación interna en  $V_3$  (es decir operando dos elementos de  $V_3$  el resultado es otro elemento de  $V_3$ ):

Sean las coordenadas de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  en una referencia ortonormada  $(v_1, v_2, v_3)$  y  $(w_1, w_2, w_3)$  respectivamente, definimos el producto vectorial de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  así:

$$\vec{v} \times \vec{w} := \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

Una regla nemotécnica para recordar el producto vectorial es:  $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

A partir de la definición anterior se puede comprobar que el producto vectorial de los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  es otro vector tal que verifica :

- a) Su módulo es  $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| |\vec{w}| \operatorname{sen} \alpha$
- b) Su dirección es perpendicular a ambos vectores.
- c) Su sentido es el de avance de un sacacorchos que gira en sentido positivo de  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$ .

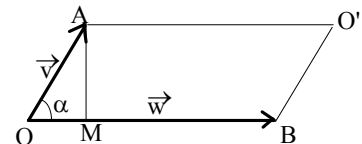
## Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial:

La definición anterior nos permite realizar una interpretación geométrica del MÓDULO del producto vectorial:

Sean  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  dos vectores. Considero dos representantes de dichos vectores libres con el mismo origen O.

Sea  $\vec{v} = \left[ \begin{matrix} \vec{OA} \end{matrix} \right]$  y  $\vec{w} = \left[ \begin{matrix} \vec{OB} \end{matrix} \right]$ .

Fijándonos en la figura adjunta, trazo una perpendicular a  $\vec{w}$  pasando por el punto A y obtengo el segmento  $\overline{AM}$  (altura del paralelogramo OAO'B)



El área del paralelogramo OAO'B es base .altura =  $|\vec{w}| \cdot \overline{AM}$  (2)

Como  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AM}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \overline{AM} = |\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$ . (Sustituyo en 2) y nos queda

Área paralelogramo =  $|\vec{w}| \cdot \overline{AM} = |\vec{w}| |\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha = |\vec{v} \times \vec{w}|$

Es decir el módulo del producto vectorial de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  es el área del paralelogramo formado a partir de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

NOTA: Es importante notar que el área del paralelogramo es  $|\vec{v} \times \vec{w}|$  (Es decir el módulo del producto vectorial, NO el producto vectorial ya que este sería un vector.)

## PRODUCTO MIXTO

**Definición:** Dados tres vectores  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  se llama producto mixto de ellos, en el orden dado y se representa por  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  al producto escalar de  $\vec{u}$  por el vector  $\vec{v} \times \vec{w}$ . Apoyándonos en la def anterior

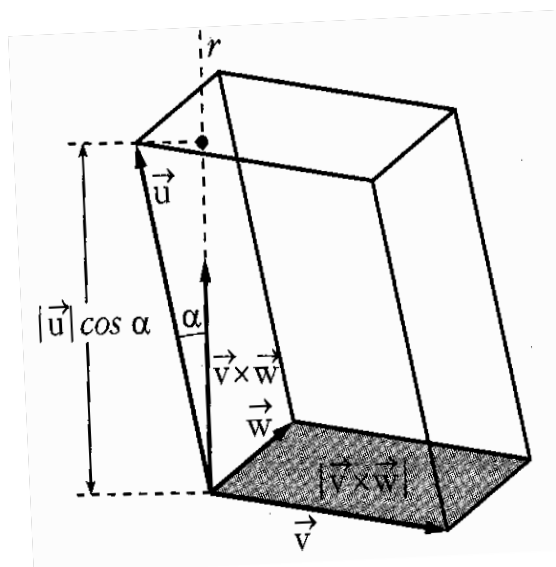
se puede ver que  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

### Interpretación geométrica del producto mixto de tres vectores:

El producto mixto de tres vectores es un número real y el valor absoluto de este número coincide con el volumen del paralelepípedo que forman los vectores.  $V = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

$$V = S_{\text{base}} \cdot \text{Altura}; \quad S = |\vec{v} \times \vec{w}|; \quad \cos(\alpha) = \frac{h}{|\vec{u}|}$$

por tanto  $h = |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$ , siendo “ $\alpha$ ” el ángulo formado por la altura y el vector  $\vec{u}$ , y el volumen nos quedaría:  $|\vec{v} \times \vec{w}| |\vec{u}| \cos \alpha$

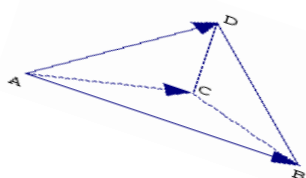


$$V = |\vec{v} \times \vec{w}| |\vec{u}| \cos \alpha$$

como además la altura y el producto vectorial de  $\vec{v} \times \vec{w}$  tienen la misma dirección ya que ambos son perpendiculares al plano que determinan los vectores  $\vec{v}; \vec{w}$ , el ángulo  $\alpha$ , coincide con el formado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v} \times \vec{w}$ , con lo que el volumen del paralelepípedo nos queda:

$$V = |\vec{v} \times \vec{w}| |\vec{u}| \cos \alpha = |\vec{v} \times \vec{w}| |\vec{u}| \cos(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

### Volumen de un tetraedro:



$$V = \frac{1}{6} \cdot \| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \|$$