

El ajedrez persa

No puede existir un lenguaje más universal y simple, más carente de errores y oscuridades, y por lo tanto más apto para expresar las relaciones invariables de las cosas naturales [...]. [Las matemáticas] parecen constituir una facultad de la mente humana destinada a compensar la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos.

JOSEPH FOURIER,

Théorie analytique de la chaleur.

Discurso preliminar (1822)

La primera vez que escuché este relato, la acción transcurría en la antigua Persia. Pero pudo haber sido en la India o incluso en China. En cualquier caso, sucedió hace mucho tiempo.

El gran visir, el primer consejero del rey, había inventado un nuevo juego. Se jugaba con piezas móviles sobre un tablero cuadrado formado por 64 casillas rojas y negras. La pieza más importante era el rey. La seguía en valor el gran visir (tal como cabría esperar de un juego inventado por un gran visir). El objeto del juego era capturar al rey enemigo y, en consecuencia, recibió en lengua persa el nombre de *shahmat* (*shah* por “rey”, *mat* por “muerto”). Muerte al rey. En Rusia, quizá como vestigio de un sentimiento revolucionario, sigue llamándose *shajmat*. Incluso en inglés hay un eco de esta denominación: el movimiento final recibe el nombre de *checkmate*. [Naturalmente, ese eco existe también en el término castellano “jaque mate”]. El juego es, por descontado, el ajedrez. Con el paso del tiempo evolucionaron las piezas, los movimientos y las reglas. Ya no existe, por ejemplo, el gran visir; se ha transfigurado en una reina de poderes formidables.

Por qué deleitó tanto a un rey la invención de un juego llamado “muerte al rey” es un misterio, pero, según la historia, se sintió tan complacido que pidió al gran visir que determinara su recompensa por tan maravillosa invención. Éste ya tenía la respuesta preparada; era un hombre modesto, explicó al *shah*, y sólo deseaba una modesta gratificación. Señalando las ocho columnas y las ocho filas de casillas del tablero que había inventado, solicitó que le entregase un grano de trigo por la primera casilla, dos por la segunda, el doble de eso por el tercero y así sucesivamente hasta que cada casilla recibiese su porción de trigo. No, replicó el rey, era un premio harto mezquino para una invención tan importante. Le ofreció joyas, bailarinas, palacios. Pero el gran visir, bajando la mirada, lo rechazó todo. Sólo le interesaban aquellos montoncitos de trigo. Así que, maravillado en secreto ante la humildad y la moderación de su consejero, el rey cedió.

Sin embargo, cuando el senescal empezó a contar los granos, el monarca se encontró con una desagradable sorpresa. Al principio el número de granos de trigo era bastante pequeño: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,..., pero en las cercanías de la casilla sexagésimo cuarta las cifras se tornaban colosales, amedrentadoras. De hecho, el número final rondaba los 18'5 trillones de granos. Tal vez el gran visir se había sometido a una dieta rica en fibra.

EL CÁLCULO QUE EL REY DEBERÍA HABER EXIGIDO A SU VISIR

No es para asustarse. Se trata de un cálculo muy fácil. Pretendemos averiguar cuántos granos de trigo correspondían a todo el ajedrez persa.

Una manera elegante (y perfectamente exacta) de calcularlo es la siguiente:

El exponente nos dice cuántas veces tenemos que multiplicar 2 por sí mismo: $2^2=4$, $2^4=16$, $2^{10}=1024$, etc. Llamaremos S al número total de granos del tablero de ajedrez, desde 1 en la primera casilla hasta 2^{63} en la sexagésimo cuarta. Entonces, sencillamente,

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$$

Multiplicando por 2 ambos miembros de la ecuación, tendremos

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$$

Restando ambas ecuaciones

$$2S - S = 2^{64} - 1$$

que es la respuesta exacta.

¿Cuánto supone esto en notación ordinaria de base 10?. Si 2^{10} se aproxima a 1 000, o 10^3 (dentro de un 2'4% de error), entonces $2^{20} = 2^{(10 \times 2)} = (2^{10})^2 = (\text{aprox.}) (10^3)^2 = 10^6 = 1$ millón. De igual modo, $2^{60} = (2^{10})^6 = (\text{aprox.}) (10^3)^6 = 10^{18}$. Así, $2^{64} = 2^4 \times 2^{60} = (\text{aprox.}) 16 \times 10^{18}$, es decir 16 trillones de granos. Un cálculo más exacto arroja 18'6 trillones de granos

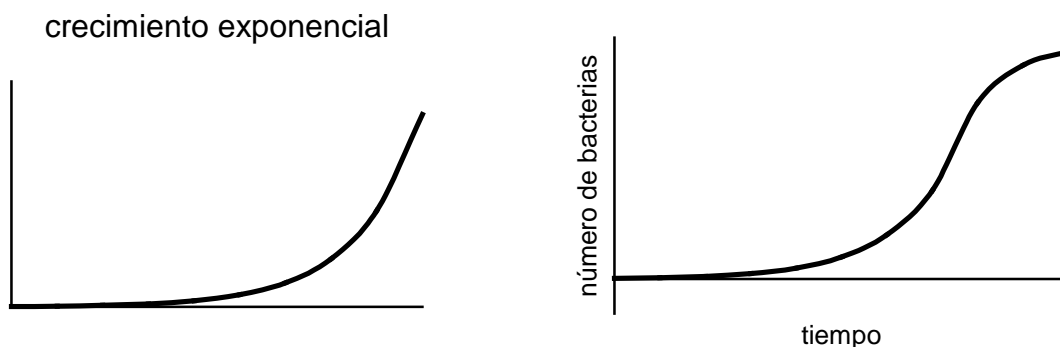
¿Cuánto pesan 18'5 trillones de granos de trigo?. Aproximadamente 75 000 millones de toneladas métricas, mucho más de lo que podían contener los graneros del *shah*. De hecho, es el equivalente de la producción actual de trigo en todo el mundo multiplicada por 150. No nos ha llegado el relato de lo que pasó inmediatamente después. Ignoramos si el rey, maldiciéndose a sí mismo por haber desatendido el estudio de la aritmética, entregó el reino al visir o si éste experimentó las tribulaciones de un nuevo juego llamado *visirmat*.

La historia del ajedrez persa quizá no sea más que una fábula, pero los antiguos persas e indios eran brillantes exploradores en el terreno de las matemáticas y sabían qué números tan enormes se podían alcanzar al multiplicar repetidamente por dos. Si el ajedrez hubiera sido inventado con 100 (10x10) casillas en lugar de 64 (8x8), la deuda en granos de trigo hubiera pesado tanto como la Tierra. Una sucesión de números como esta, en la que cada uno es un múltiplo fijo del anterior, recibe el nombre de progresión geométrica, y el proceso se denomina crecimiento exponencial. Los crecimientos exponenciales aparecen en toda clase de ámbitos importantes, familiares o no. Un ejemplo es el interés compuesto. Si, pongamos por caso, un antepasado nuestro ingresó en el banco 10 dólares hace 200 años (poco después de la Revolución de Estados Unidos) a un interés anual constante del 5% ahora nuestra fortuna ascendería a $10 \times (1.05)^{200}$, es decir, 172 925'81 dólares. Pero pocos son los antepasados que se interesen por la fortuna de sus remotos descendientes, y 10 dólares eran bastante dinero en aquellos días. Si ese antepasado nuestro hubiera conseguido un interés del 6%, ahora tendríamos más de 1 millón de dólares; al 7% la cifra superaría los 7'5 millones, y a un exorbitante 10% tendríamos la espléndida suma de 1 900 millones de dólares.

sucesiones de números reales

Otro tanto sucede con la inflación. Si la tasa de inflación anual es del 5%, un dólar valdrá 0'95 dólares al cabo de un año, $(0'95)^2 = 0'91$ al cabo de dos; 0'61 al cabo de 10; 0'37 dólares al cabo de 20, etc. Se trata de una cuestión de gran importancia práctica para aquellos jubilados cuya pensión no aumenta de acuerdo con la inflación.

El ámbito más corriente donde se producen duplicaciones repetidas y, por tanto crecimiento exponencial, es de la reproducción biológica. Consideremos primero el caso simple de una bacteria que se reproduce por bipartición. Al cabo de un tiempo se dividen también cada una de las bacterias hijas. Mientras haya alimento suficiente en el ambiente y no exista veneno alguno, la colonia bacteriana crecerá de modo exponencial. En condiciones muy favorables la población de bacterias puede llegar a doblarse cada 15 minutos. Esto significa cuatro duplicaciones por hora y 96 diarias. Aunque una bacteria sólo pesa una billonésima de gramo, tras un día de desenfreno asexual sus descendientes pesarán en conjunto tanto como una montaña; en poco más de día y medio pesarán tanto como la Tierra, en dos días más que el Sol... Y en no demasiado tiempo todo el universo estará constituido por bacterias. No es una perspectiva agradable, pero por fortuna nunca sucede. ¿Por qué?. La razón es que un crecimiento exponencial de este tipo siempre tropieza con algún obstáculo natural. Los bichos se quedan sin comida, o se envenenan mutuamente, o les da vergüenza reproducirse cuando no disponen de intimidad para hacerlo. Los crecimientos exponenciales no pueden continuar indefinidamente porque se lo zamparían todo. Mucho antes de eso encuentran algún impedimento. El resultado es que la curva exponencial se allana, como en el siguiente gráfico.



Todo el mundo tiene dos progenitores, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, 16 tatarabuelos, etc. por cada generación que retrocedamos, tendremos el doble de antepasados directos. Cabe advertir que este problema guarda mucha semejanza con el del ajedrez persa. Si, por ejemplo, cada 25 años surge una nueva generación, entonces, 64 generaciones atrás serán $64 \times 25 = 1\ 600$ años, es decir, justo antes de la caída del imperio romano. De este modo, cada uno de los que ahora vivimos tenía en el año 400 d. C. unos 18'5 trillones de antepasados directos..., o así parece. Y eso sin hablar de los parientes colaterales. Ahora bien, esa cifra supera con creces la población de la Tierra en cualquier época; es muy superior incluso el número acumulado de seres humanos nacidos a lo largo de toda la historia de nuestra especie. Algo falla en nuestro cálculo. ¿Qué es?. Bueno, hemos supuesto que todos esos antepasados directos eran personas diferentes. Sin embargo, no es ése el caso. Un mismo antepasado se encuentra emparentado con nosotros por numerosas vías diferentes. Nos hallamos vinculados de forma repetida y múltiple con cada uno de nuestros parientes, y muchísimo más con los antepasados remotos.

sucesiones de números reales

Algo parecido sucede con el conjunto de la población humana. Si retrocedemos lo suficiente, dos personas de la Tierra encontrarán un antepasado común. Siempre que sale elegido un nuevo presidente de Estados Unidos, alguien –generalmente un inglés– descubre que el nuevo mandatario está emparentado con la reina o el rey de Inglaterra. Se considera que esta circunstancia liga a los pueblos de habla inglesa. Cuando dos personas proceden de una misma nación o cultura, o del mismo rincón del mundo, y sus genealogías están bien trazadas, es probable que se acabe por descubrir a su último antepasado común. En cualquier caso, las relaciones están claras, todos los habitantes de la Tierra somos primos.

Los crecimientos exponenciales aparecen también corrientemente asociados al concepto de *vida media*. Un elemento radioactivo “padre” –plutonio, por ejemplo, o radio– se descompone en otro elemento “hijo”, tal vez menos peligroso. Ahora bien, no lo hace de forma inmediata, sino estadística. Al cabo de cierto tiempo la desintegración ha afectado a la mitad de los átomos, y a este periodo se le denomina vida media. La mitad de lo que queda se desintegrará en otra vida media, y la mitad del resto en una nueva vida media, etc. Por ejemplo, si la vida media fuese de un año, la mitad se desintegraría en un año, la mitad de la mitad, o todo menos un cuarto, desaparecería en dos años, todo menos un octavo en tres, todo menos una milésima en 10 años, etc. Los diferentes elementos tienen distintas vidas medias. La vida media es un criterio básico cuando se trata de decidir qué se hace con los residuos radioactivos de las centrales nucleares o cuando se considera la lluvia radioactiva en una guerra atómica. Representa una decadencia exponencial, del mismo modo que el ajedrez persa supone un crecimiento exponencial.

La desintegración radioactiva es uno de los métodos principales para datar el pasado. Si podemos medir en una muestra la cantidad de material radioactivo padre y la cantidad de material hijo producto de la desintegración, cabe determinar la antigüedad de esa muestra. Es así como hemos descubierto que el llamado Santo Sudario de Turín no es la sábana con la que se envolvió el cuerpo de Jesús, sino un engaño piadoso del siglo XIV (cuando fue anunciado como tal por las autoridades eclesiásticas), que los seres humanos prendían hogueras hace millones de años, que los fósiles más antiguos de la Tierra tienen al menos 3 500 millones de años, y que la edad de nuestro planeta es de 4 600 millones de años. El cosmos es, desde luego, miles de millones de años más viejo. Cuando uno comprende los crecimientos exponenciales, tiene en su mano la clave de muchos de los secretos del universo.

Conocer algo de forma meramente cualitativa es conocerlo de manera vaga. Si tenemos conocimiento cuantitativo –captando alguna medida numérica que lo distinga de un número infinito de otras posibilidades– estamos comenzando a conocerlo en profundidad, comprendemos algo de su belleza y accedemos a su poder y al conocimiento que proporciona. El miedo a la cuantificación supone limitarse, renunciar a una de las perspectivas más firmes para entender y cambiar el mundo.

Texto extraído del libro
Miles de millones. Carl Sagan. Ediciones B, 1998.