UNIT 2 DIVISIBILITY

1.- MULTIPLES AND FACTORS

1.1.- Concept of multiple

We say that a number **a** is a multiple of another number **b** if the division **a** : **b** is an exact division, that is, if **b** contains **a** a whole number of times.
And in Spanish: Un número **a** es múltiplo de otro número **b** si la división **a: b** es exacta.
Para obtener los múltiplos de un número lo multiplicamos por 1, 2, 3 y así sucesivamente.

Solved Example:
Obtain some multiples of 3, 5 and 7:
3x1, 3x2, 3x3, 3x4, 3x5, 3x6 .... so Multiples of 3 = 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...
5x1, 5x2, 5x3, 5x4, 5x5, 5x6 .... so Multiples of 5 = 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...
7x1, 7x2, 7x3, 7x4, 7x5, 7x6 .... so Multiples of 7 = 7, 14, 21, 28, 35, 42, ...

1.2.- Concept of factor

We say that a number **b** is a factor of another number **a** if the division **a : b** is an exact division.

And in Spanish: Un número **b** es divisor de otro número **a** si la división **a : b** es una división exacta. Por tanto, si la división **a : b** es exacta, entonces **a** (el número más grande) es el múltiplo y **b** (el número más pequeño) es el divisor.

Para encontrar los divisores de un número debemos hacer probar a dividir por todos los números naturales que son más pequeños que él. Pero hay un pequeño truco que es irlos agrupando por parejas de divisores: Empezamos dividiendo por 1, 2, 3... y si encontramos un divisor el cociente es otro divisor. Seguimos así hasta que empiecen a repetirse.

Solved Example:
Obtain all the factors of 90:
90 : 1 = 90; 90 : 2 = 45; 90 : 3 = 30; 90 : 4 = not possible; 90: 5 = 18; 90 : 6 = 15; 90 : 7 = n. p.; 90 : 8 = n.p.; 90 : 9 = 10; 90 : 10 = 9 (10 and 9 is repeated, so we are done).
So, the factors of 90 are: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

Solve the following exercises:

1. Find three multiples of 11 that are between 27 and 90.
2. Work out if 556 is a multiple of 4
3. Find out if 12 is a factor of 144
4. Which of these numbers is a factor of 91?

a) 3 b) 7 c) 11 d) 13

5. Work out all the factors of the following numbers:

a) 24 b) 27 c) 48 d) 25 e) 7 f) 56

6. Point out which of these numbers have exactly three factors.

a) 4 b) 25 c) 15 d) 49

1.3.- The properties of multiples and factors

Multiples	Factors
a) Every number is the mutiple of itself. Cada número es múltiplo de sí mismo. Example: 3 is a multiple of 3	a) Every number is the factor of itself. Todo número es divisor de si mismo. Example: 3 is a factor of 3.
b) Every number is the multiple of 1. Todos los números son múltiplos de 1. Example: 7 is a multiple of 1.	b) 1 is the factor of any number. 1 es divisor de cualquier número. Example: 1 is a factor of 7
c) Zero is the multiple of any number. Cero es múltiplo de cualquier número. Example: 0 is a multiple of 3.	c) Zero is not the factor of any number. Cero no es divisor de ningún número. Example: Zero is not a factor of 2
d) Every number has an infinite number of multiples. Todos los números tienen infinitos múltiplos	d) The set of the factors of a number is finite. El conjunto de divisores de un número es finito

2.- PRIME AND COMPOSITE NUMBERS

Si miras al ejercicio anterior habrás visto que hay números que sólo tienen dos divisores, son los números primos. Otros, sin embargo tienen más de dos divisores y se llaman números compuestos.

So, a prime number only has two factors: the number one and itself. For example: 3, 5, 11, 17, etc. A composite number has more than two factors. For example: 4, 9, 15, 30, etc.

And in Spanish: Un número primo es el que tiene dos divisores y un número compuesto tiene más de dos divisores.

Para averiguar si un número es primo o compuesto puedes hallar sus divisores, o bien dividirlo por todos los números primos menores que él, si no encuentras ningún divisor, entonces el número es primo.

A smart procedure to find the first prime numbers is the Sieve of Erathostenes. It consists of a table with the numbers from 1 to 100, like the one below, and now do the following rules:

- Number 2 is prime. Circle it, then cross out all the multiples of 2.
- Circle the next number that is not crossed out (3) because it is prime too. And then, cross out all its multiples.
- Continue in this way, that is, circle the numbers which are not crossed out and cross out all its multiples until you finish with the table. Then you will have got the first prime numbers lower than 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Solve the following exercises:

- Work out the factors of the numbers below and then point out which ones are prime numbers.

a) 8 b) 101 c) 57 49

3.- DIVISIBILITY RULES

Las reglas de divisibilidad te ayudan a saber si un número es múltiplo de otro sin hacer la división.

- **Rule of number 2**: A number is divisible by 2 if its last digit is either 0 or an even number. Un número es divisible por 2 si su última cifra es 0 ó un número par. Example: 46,200, 34, 108.....
- **Rule of number 3**: A number is divisible by 3 if the sum of its digits is a multiple of 3. Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Example: 45, 105, 300, 417....
- **Rule of number 4**: A number is divisible by 4 if its two last digits are multiples of 4. Un número es divisible por 4 si sus dos últimas cifras son múltiplo de 4. Example: 100, 224, 340, 664....
- **Rule of number 5**: A number is divisible by 5 if it ends in 0 or 5. Un número es múltiplo de 5 si acaba en 0 ó 5. Example: 200, 345, 650, 800 .....
- **Rule of number 9**: A number is divisible by 9 if the sum of its digits is a multiple of 9. Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9. Example: 81, 333, 450, 1278.....
- **Rule of number 10**: A number is divisible by 10 if it ends in 0. Un número es divisible por 10 si acaba en 0. Example: 30, 400, 500.
- **Rule of number 11**: A number is divisible by 11 if the difference between the sum of the digits on odd positions and the sum of the digits on even positions is 0, 11 or a multiple of 11. Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras en posición par y la suma de las cifras en posición impar es 0, 11 o un múltiplo de 11. Example: 121, 3652

Solve the following exercises:

- Use the divisibility rules to complete the following table:

Divisible by	2	3	4	5	9	10	11	25	100
375									
990									
1.848									
12.300									
14.240									

- Find out two numbers with five digits that are divisible by both 2 and 5 and aren't divisible by 100
- Write down two numbers with five digits that are multiples of:
  - a) 3 and 11 but not of 9
  - b) 9 and 11. Are they multiples of 3?

4.- PRIME FACTOR DECOMPOSITION OF A NUMBER

Cada número compuesto puede escribirse como un producto de números, a veces incluso como varios productos distintos:

Example: 15 = 5 x 3 ; 24 = 2 x 12 = 3 x 8 = 3 x 2 x 4 = 24 x 1= ....

Pero cada número puede ser escrito únicamente como un producto de números primos que es único. Encontrar ese producto es lo que llamamos descomposición en factores primos. In English we call it prime factor decomposition of a number.

Si tenemos un número pequeño podemos hacer la descomposición mentalmente, pero recuerda sólo puedes usar números primos.

Example: 6 = 2 x 3; 24 = 4 x 6 = 2 x 2 x 2 x 3 = 2^3 x 3

Si tenemos un número mayor haremos divisiones sucesivas empezando por 2, cuando termines por 3 (sólo divisores primos). El producto de todos los divisores es la descomposición en factores primos.

Solved Example:

- Work out the prime decomposition of 3600

3600 = 2^4 x 3^2 x 5^2

Hint: If the number ends in zero, you can change each zero by the factors 2 x 5, so if the last two digits are zeros, the prime decomposition will have 2^2 x 5^2. Truco: Cuando el número acabe en 0, se puede cambiar cada cero por los factores 2 x 5, así que si las dos últimas cifras son cero la descomposición en factores primos tendrá 2^2 x 5^2.

- Work out the prime decomposition of 25000 and 180000

25000 = 25 x 2^3 x 5^3 = 5^2 x 2^3 x 5^3 = 2^3 x 5^5

180000 = 18 x 2^4 x 5^4 = 2 x 3^2 x 2^4 x 5^4 = 2^5 x 3^2 x 5^4

Solve the following exercises:

- Work out the prime factor decomposition of the following numbers:

a) 108 b) 99 c) 42 d) 37 e) 100 f) 840

- Complete these prime factor decompositions:

a) 360 = $2^?$ x $?^2$ x 5 b) 300 = $?^2$ x ? x 5^2

5.- THE HIGHEST COMMON FACTOR AND THE LEAST COMMON MULTIPLE

5.1.- Concept of the highest common factor (HCF)

Vamos a calcular los divisores de varios números, por ejemplo 30, 48, 54.
Factors of 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
Factors of 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48
Factors of 54: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54
Ahora vamos a elegir los divisores comunes a los tres números:
Factors of 30: **1, 2, 3**, 5, **6,** 10, 15, 30
Factors of 48: **1, 2, 3,** 4, **6,** 8, 12, 16, 24, 48
Factors of 54**: 1, 2, 3, 6**, 9, 18, 27, 54
Cuál es el mayor de todos? Es el 6 por lo que el máximo común divisor de 30, 48 y 54 es el 6.

Definition:
The highest common factor of several numbers is the largest number that evenly divides into all of them.
And in Spanish: El máximo común divisor de varios número es el mayor número que los divide a todos.

10.2.- Rule for calculating the h.c.f

A veces puede llevar mucho tiempo averiguar todos los divisores de varios nombres por lo que hace falta un método más sencillo.

Regla:

"To work out the hcf of several numbers, first you have to find the prime factor decomposition of the given numbers and then, to take the common factors with the least index".

And in Spanish: Para claclular el m.c.d. de varios números, primero se descomponen en factores primos y después se toman los factores comunes con el menor exponente.

Solved example:

- Find out the hcf of numbers 36, 48 y 90.

1.- Write them as a product of prime factors:
$36 = 2^2\ 3^2$
$48 = 2^4\ 3\ \cdot$
$90 = 2^3\ 2^5\ \cdot$
2.- Take the common factors with the least index: h.c.f. = 2 3 = 6 ·
We can also do it in the English way. It consists of writing all the factors of each number in a row and then mark the common ones.
36 = 2 2 3 3 · · ·
48 = 2 2 2 2 3 · · · ·
90 = 2 3 3 5 · · ·
Señalamos los factores que sean comunes en los tres números:
36 = **2** 2 **3** 3 ·
48 = **2** 2 2 2 **3** m.c.d. = 2 3 = 6 ·
90 = **2 3** 3 5 · ·

Solve the following exercises:

- Work out the factors of the numbers below and then find out the hcf:

a) 2 and 16 b) 3 and 25 c) 9, 12 and 18 d) 27, 36 and 63

- Find out the hcf of the following numbers using the Spanish and the English methods:

a) 4, 6, 18 and 32 b) 3, 4, 12, 36 and 48

5.3.- Concept of the least common multiple (lcm)

En este caso vamos a hallar los múltiplos de varios números, por ejemplo 2 y 3:
Multiples of 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32,...
Multiples of 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36,....
Ahora, escogeremos los múltiplos comunes de ambos números:
Multiples of 2: 2, 4, **6**, 8, 10, **12**, 14, 16, **18**, 20, 22, **24**, 26, 28, **30**, 32,...
Multiples of 3: 3, **6**, 9, **12,** 15, **18**, 21, **24,** 27, **30**, 33, 36,....
¿Cuál es el más pequeño? Es 6 por tanto 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3.

Definition: The least common multiple of several numbers is the smallest number that is multiple of all of them.
And in Spanish: El menor común múltiplo de varios números es el menor número que es múltiplo de todos ellos.

5.4.- Rule for calculating the lcm

Como en el caso del m.c.d. necesitamos una regla mas fácil para calcular el m.c.m. sin necesidad de hallar todos los múltiplos de los números. Esta regla es:
Regla:
“To work out the lcm of several numbers, first write them as a product of their prime factors and then take the common and non-common factors with the highest index.”
And in Spanish: Para calcular el m.c.m. De varios números, primero se halla la descomposición en factores primos y después se toman los comunes y no comunes con el mayor exponente.

Solved example:

- Find out the lcm of numbers 36, 48 and 90

1.- First obtain the prime factor decomposition:
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$48 = 2^4 \cdot 3$
$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
2.- Now, take the common and non-common factors with the highest index:
l.c.m = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$
A pesar de tener estas reglas es una buena idea acostumbrarse a calcular el m.c.d. y m.c.m. mentalmente cuando los números son pequeños. Sólo tienes que pensar en un múltiplo pequeño o en un divisor grande de los números dados.

Solved example:

- Find out mentally the hcf and the lcm of the numbers below:

a) 3 and 5; hcf = 1 lcm = 15
b) 2 and 4; hcf = 2 lcm = 4
c) 6 and 15; hcf = 3 lcm = 30

Solve the following exercises:

- Work out the l.c.m. of the numbers below:

a) 9, 12 and 18 b) 27, 36 and 63

- Work out the l.c.m. of the following numbers. What conclusion do you reach?

a) 2, 4, 8 and 16 b) 3, 4, 6 and 12.